

MAT203 GENEL TOPOLOJİ I
DÖNEM SONU SINAVI ÇALIŞMA SORULARI

A) Aşağıdaki ifadeleri ispatlayınız.

- i) Bir metrik uzayda her tek nokta kümesi kapalıdır.
- ii) $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu açıktır $\iff$ Her $A \subseteq X$ için $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$ dir.
- iii) Cauchy dizisi olma özelliği bir topolojik özellik değildir.
- iv) $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu kapalıdır $\iff$ Her $A \subseteq X$ için $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ dır.

B) Aşağıdaki soruları çözünüz.

1. a) $\beta = \{ [x, \infty) \mid x \in \mathbb{R} \}$ sınıfı baz olacak şekilde $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji var mıdır? Gösteriniz.
b) $\mathcal{A} = \{ (-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R} \} \cup \{ [x, \infty) \mid x \in \mathbb{R} \}$ sınıfı tarafından üretilen topolojiyi bulunuz.
2. $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi verilsin.
a) $\beta = \{ \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \{b, c, e\} \}$ sınıfı X üzerindeki bir topoloji için baz olabilir mi?
b) $\mathcal{A} = \{ \{b, c, d\}, \{a, b, c\}, \{c, d, e\} \}$ sınıfı tarafından üretilen topolojiyi bulunuz.
3. $(\mathbb{R}, \mathcal{U}^L)$ üst limit uzayı verilsin. $\beta = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q} \text{ ve } x < y \}$ sınıfı verilen topoloji için bir baz olur mu? Gösteriniz.
4. $\mathbb{R}$ de $(a_n) = \left(\frac{1-n}{n} \right)$ dizisinin aşağıdaki topolojilere göre yakınsaklığını inceleyiniz.
a) $P(\mathbb{R})$ (diskre) b) $\mathcal{U}_L$ (alt limit) c) $\mathcal{U}^L$ (üst limit) d) τ =tümleyeni sonlu
5. $\mathbb{R}$ üzerinde $\tau = \{ (x, \infty) \mid x \in \mathbb{R} \} \cup \{ \mathbb{R}, \emptyset \}$ topolojisi verilsin. Bu topolojik uzayda aşağıdaki dizilerin yakınsaklığını inceleyiniz.
a) $(a_n) = \left(-\frac{1}{n} \right)$ b) $(b_n) = (n) = (1, 2, 3, \dots)$
6. $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{ X, \emptyset, \{a, b, c\}, \{b, d, e\}, \{b\} \}$ topolojisi verilsin. Buna göre,
a) $(a_n) = (a, c, b, d, b, d, b, d, \dots)$ dizisinin yakınsaklığını inceleyiniz.
b) Hiçbir noktaya yakınsamayan bir dizi yazınız.
7. $X = \{a, b, c\}$ olmak üzere X de $(a_n) = (a, b, a, b, a, b, \dots)$ dizisi verilsin. Buna göre,
a) (a_n) dizisi hiçbir noktaya yakınsamayacak şekilde X üzerinde bir topoloji yazınız.
b) $(a_n) \nrightarrow a, (a_n) \nrightarrow b$ ve $(a_n) \rightarrow c$ olacak şekilde X üzerinde bir topoloji yazınız.
c) X üzerindeki $\tau = \{ X, \emptyset, \{a, c\}, \{c\} \}$ topolojisi için (a_n) dizisinin yakınsaklığını inceleyiniz.
8. X bir küme ve $a \in X$ olsun. X üzerinde $\tau_a = \{ G \subseteq X \mid a \in G \} \cup \{ \emptyset \}$ topolojisi verilsin. Buna göre,
a) X deki bir (a_n) dizisinin a noktasına yakınsaması için gerekli olan şartı bulunuz.
b) X deki bir (a_n) dizisinin bir $x \neq a$ noktasına yakınsaması için gerekli olan şartı bulunuz.
9. $f : (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{U})$ fonksiyonu $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in Q \\ 1 & , \quad x \in Q^c \end{cases}$ şeklinde tanımlansın.
Buna göre, f fonksiyonu sürekli midir ? kapalı mıdır ? açık mıdır ? Gösteriniz.

10. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ topolojisi ve $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi üzerinde $\sigma = \{Y, \emptyset, \{1, 3\}, \{2\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}\}$ topolojisi verilsin. Buna göre, $f(a) = 1, f(b) = 3, f(c) = 2, f(d) = 5$ şeklinde tanımlı $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu sürekli midir? Açık mıdır? Kapalı mıdır? Gösteriniz.
11. $f : (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{U}_L), f(x) = x^2$ fonksiyonu sürekli midir? Açık mıdır? Gösteriniz.
12. $f : (\mathbb{R}, \mathcal{U}^L) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{U})$ fonksiyonu $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x > 0 \\ x-1 & , x \leq 0 \end{cases}$ şeklinde tanımlansın. Buna göre, f fonksiyonu sürekli midir ? Açık mıdır ? Kapalı mıdır? Homeomorfizm midir? Gösteriniz.
13. $\mathcal{U}$ alışılmış, τ tümleyeni sonlu topoloji olmak üzere $f : (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{U})$ fonksiyonu $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$ şeklinde tanımlansın. Buna göre, f fonksiyonu sürekli midir? Açık mıdır? Kapalı mıdır? Gösteriniz.
14. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = \begin{cases} 1 & , x > y \\ y-x & , x \leq y \end{cases}$ şeklinde tanımlı $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu bir metrik midir? Gösteriniz.
15. $\mathbb{R}$ üzerinde $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ verilsin. Buna göre;
- a) d nin bir metrik olduğunu gösteriniz.
- b) Bir $a \in \mathbb{R}$ için $D(a, \frac{1}{2})$ açık diskini bulunuz.
- c) $A = [0, 2]$ ve $x = 4$ ise $d(x, A) = ?$ değerini bulunuz.
16. $[0, 2]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların sınıfı $C[0, 2]$ olmak üzere;
- a) $f, g \in C[0, 2]$ için $d(f, g) = \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx$ ile tanımlı d nin bir metrik olduğunu gösteriniz.
- b) $f_0(x) = x^2$ ve $g(x) = 2x$ fonsiyonları verilsin. Buna göre $g \in D(f_0, \frac{5}{4})$ olur mu? Gösteriniz.
17. $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$ üzerinde $d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ ve $e(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ metrikleri verilsin. Buna göre;
- a) $a = (3, 4)$ merkezli, $r = 2$ yarıçaplı $D_d[a, r]$ ve $D_e[a, r]$ kapalı disklerini bulunuz, grafiğini çiziniz.
- b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 2\}$ kümesinin d ve e metriklerine göre çapını bulunuz. ($d(A) = ?$, $e(A) = ?$)
18. $\mathbb{R}$ üzerinde $d(x, y) = |x - y|$ alışılmış metriği ve $e(x, y) = \begin{cases} 0 & , x = y \\ 1 & , x \neq y \end{cases}$ ayrık metriği verilsin. $f : (\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}, e)$ birim fonksiyonunun bir izometri olup olmadığını araştırınız.
19. $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ bir N vektör uzayı üzerinde birer norm ise, $\|x\| = \|x\|_1 + \|x\|_2$ şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|$ da N üzerinde bir norm olur mu? Gösteriniz.
20. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ metriği ve $e(x, y) = \begin{cases} 0 & , x = y \\ 2 & , x \neq y \end{cases}$ ayrık metriği birer norm metriği olur mu? Gösteriniz.